

DEVOIR MAISON I CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

1. Si le rat trouve la nourriture au k^{e} trajet, alors il ne peut pas l'avoir trouvée avant d'après le protocole.
2. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{2^{k-1}}{3^k}$. D'où $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = \frac{19}{27}$
 b. $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}$ et pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{3 \times 2^{k-2}}$. D'où $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = \frac{5}{6}$
 c. Pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{3}$ et pour tout $k \geq 4$, $\mathbb{P}(A_k) = 0$. D'où $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 1$

On peut rassembler ces résultats dans un tableau :

Hypothèse	$\mathbb{P}(A_1)$	$\mathbb{P}(A_2)$	$\mathbb{P}(A_3)$	$\dots$	$\mathbb{P}(A_k)$	$\dots$	$\mathbb{P}(R_n)$
(H_0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$		$\frac{2^{k-1}}{3^k}$		$\frac{19}{27}$
(H_1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3 \times 2^{k-2}}$		$\frac{5}{6}$
(H_2)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		0		1

3. On applique la Formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(R_n) = \frac{137}{162}$.
4. Dans le pire des cas, le rat ne trouve pas la nourriture lors des $n - 1$ premiers trajets. Mais alors il ne lui reste plus qu'un couloir à tester (il sait que les autres sont vides) et donc il trouve la nourriture lors du n^{e} trajet. D'où $\mathbb{P}(R_n) = 1$.
5. a. Si $1 \leq k \leq m + 1$, alors $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$. Si $m + 2 \leq k \leq n$, alors $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{k-m-1}$.
 b. $\mathbb{P}(R_n) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{n-m}\right)$.
 c. On remplace m par $n - 1$ dans la formule ci-dessus et on vérifie qu'on trouve 1.
6. Forme exponentielle et équivalent usuel
7. a. il faut connaître l'équivalent $\lfloor \alpha n \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$ (car $\alpha > 0$). Ensuite, c'est comme à la question 6.
 b. $\alpha \geq 1 - \frac{e}{10}$
8. Le programme se complète en :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 A = [n for n in range(21, 2022)]
5 C = [1 - np.exp(-1) for n in A]
6 m = 20
7 U = [m/n + ((n-m)/n) * (1 - (1 - 1/(n-m))**(n-m)) for n in A]
8 plt.plot(A, U)
9 plt.plot(A, C)
10
```

On retrouve le résultat de la question 6 à l'aide du tracé.

9. La fonction s'écrit :

Date: 15 Septembre.
<http://louismerlin.fr>.

```
1 def PlusPetitReussite(n) :  
2     m = 0  
3     while m/n + ((n-m)/n)*(1-(1-1/(n-m))**(n-m)) < 9/10 :  
4         m = m+1  
5     return m
```

10. On conjecture que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{e}{10}\right)$.